数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)　$x^{3m}-1=(x^3)^m-1$

$$=(x^3-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$$

m は正の整数であるから，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる …[証明終]

(2)　$x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とすると，$\omega^3=1$

$$\omega^3-1=0$$

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$\omega\neq 1$ であるから

$$\omega^2+\omega+1=0$$

x^n-1 を x^2+x+1 で割ったときの商を $P(x)$，余りを $ax+b$ とすると (ただし，a，b は実数)

$$x^n-1=(x^2+x+1)P(x)+ax+b$$

このとき，$\omega^n-1=a\omega+b$

(i)　$n=3m$ ($m=1$，2，3，…) のとき，$\omega^3=1$ より

$$\omega^n-1=(\omega^3)^m-1=0$$

$$a\omega+b=0$$

a，b は実数，ω は虚数であるから，$a=b=0$

よって，余りは 0

(ii)　$n=3m+1$ ($m=0$，1，2，…) のとき

$$\omega^{3m+1}-1=a\omega+b$$

$\omega^3=1$ だから，$\omega^{3m+1}-1=\omega-1$ より

$$\omega-1=a\omega+b$$

a，b は実数，ω は虚数より $a=1$，$b=-1$

よって，余りは $x-1$

(iii)　$n=3m+2$ ($m=0$，1，2，…) のとき

$$\omega^{3m+2}-1=a\omega+b$$

$\omega^{3m+2}-1=\omega^2-1=(-\omega-1)-1=-\omega-2$ より

$$-\omega-2=a\omega+b$$

a，b は実数，ω は虚数より $a=-1$，$b=-2$

よって，余りは $-x-2$

以上から，x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りは

$$\begin{cases} n\text{が}3\text{の倍数のとき} & 0 \\ n\text{が}3\text{で割って余りが}1\text{のとき} & x-1 \\ n\text{が}3\text{で割って余りが}2\text{のとき} & -x-2 \end{cases}$$ …[答]

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $sx+t$ とすると (ただし，s，t は実数)

$$x^{2024}-1=(x^2-x+1)Q(x)+sx+t$$

$x=-\omega$ として

$$(-\omega)^{2024}-1=(\omega^2+\omega+1)Q(-\omega)-s\omega+t$$

$$\omega^{2024}-1=-s\omega+t$$

$2024=3\times 674+2$ から $\omega^{2024}=\omega^2$ より

$$(-\omega)^{2024}-1=\omega^2-1=(-\omega-1)-1=-\omega-2$$

$$-\omega-2=-s\omega+t$$

s，t は実数，ω は虚数より，$s=1$，$t=-2$

したがって，求める余りは　$x-2$ …[答]

高松高等予備校

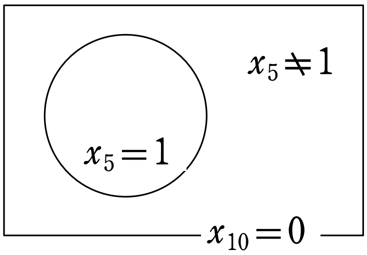
$\boxed{2}$

一般に事象Aが起こる確率をP(A)と表すことにする。

(1) $x_{10}=0$ となるのは表5回裏5回出たときだから

$$P(x_{10}=0)={}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256}$$ …[答]

(2) 求める確率を



$P(x_5\fallingdotseq 1$ かつ $x_{10}=0)=P(x_{10}=0)-P(x_5=1$ かつ $x_{10}=0)$

と考えて $x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となるのは

はじめの5回は表3回裏2回出て，

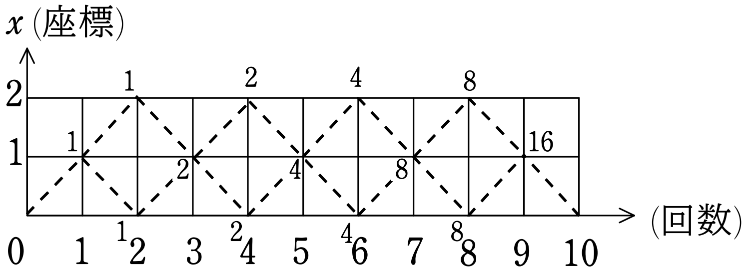
あとの5回は表2回裏3回出るときだから

$$P(x_5=1 \text{ かつ } x_{10}=0)={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{25}{256}$$

よって

$$P(x_5\fallingdotseq 1 \text{ かつ } x_{10}=0)=\frac{63}{256}-\frac{25}{256}=\frac{19}{128}$$ …[答]

(3) 点Pの移動を次の図のように考える。



$0\leqq x_n\leqq 2\,(n=1, 2, \cdots, 9)$ かつ $x_{10}=0$ となるのは

点線を通過するときで，この経路は16通りある。

よって，求める確率は

$$16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{64}$$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}&=-\overrightarrow{AG}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG})\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

…[証明終]

(2) $\text{左辺}=|\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GC}|^2$

$$\begin{aligned}&=3|\overrightarrow{PG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2+2\overrightarrow{PG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})\\&=3|\overrightarrow{PG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2 \quad (\because (1))\end{aligned}$$

…[証明終]

(3) (2) より $|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2-3|\overrightarrow{PG}|^2$

P が A に一致するとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2&=|\overrightarrow{AA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-3|\overrightarrow{AG}|^2\\&=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-3\left|\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\right|^2\\&=\frac{2|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{3}\\&=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2}{3}\\&=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{3}\end{aligned}$$

…[証明終]

(4) △ABC の外心を O とすると

(2) より $|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2-3|\overrightarrow{PG}|^2$

P が O に一致するとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2&=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-3|\overrightarrow{OG}|^2\\&=R^2+R^2+R^2-3|\overrightarrow{OG}|^2\\&=3R^2-3|\overrightarrow{OG}|^2\end{aligned}$$

(3) より $|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{3}$ であるから

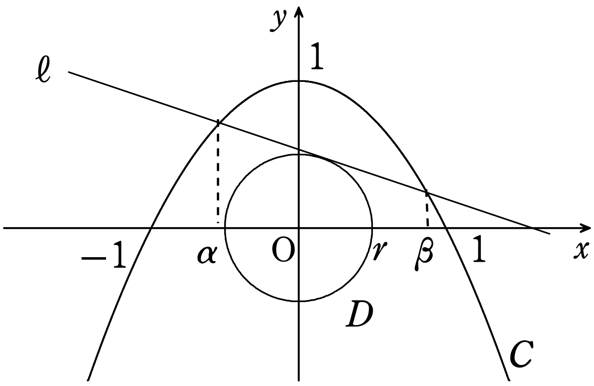
$$\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{3}=3R^2-3|\overrightarrow{OG}|^2\leqq 3R^2$$

$$\therefore \quad R^2 \geqq \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2}{9}$$

…[証明終]

高松高等予備校

$\boxed{4}$



(1) $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 & \cdots ① \\ y=-x^2+1 & \cdots ② \end{cases}$

①，②より

$$1-y+y^2=r^2$$

$$y^2-y-r^2+1=0$$

判別式を D とすると

$$D=1+4r^2-4<0$$

$$(2r-\sqrt{3})(2r+\sqrt{3})<0$$

$r>0$ より

$$0<r<\frac{\sqrt{3}}{2}$$ …[答]

(2) 接線 ℓ の方程式は，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ より，

$$y=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}$$

よって，放物線 C と接線 ℓ の交点の x 座標を α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ とすると

$$\begin{cases} y=-x^2+1 & \cdots ③ \\ y=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{r}{\sin\theta} & \cdots ④ \end{cases}$$

③，④より

$$-x^2+1=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}$$

$$x^2-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}-1=0$$

α，β はこの方程式の解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\quad \alpha\beta=\frac{r}{\sin\theta}-1$$

よって，求める部分の面積 S は，

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{(-x^2+1)-\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{4r}{\sin\theta}+4\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{4r}{\sin\theta}+4\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{4r}{\sin\theta}+3\right)^{\frac{3}{2}}$$

…[答]

高松高等予備校