

2024年度入学試験問題

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

注 意

- 1 問題冊子は1冊(2ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答えだけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数 学 (数学 I・数学 II・数学 A・数学 B)

1

m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。

2

数直線上を動く点 P がある。点 P は、原点 O を出発して、1 枚のコインを 1 回投げごとに、表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み、裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし、コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $0 \leq x_n \leq 2$ ($n = 1, 2, \dots, 9$) かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

3

平面上に三角形 ABC を考え、その重心を G とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。
 (2) 平面上の任意の点 P に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = 3|\overrightarrow{PG}|^2 + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2$$

- (3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{3}$$

- (4) 三角形 ABC の外接円の半径を R とするとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geq \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{9}$$

4

座標平面において、放物線 $y = -x^2 + 1$ を C 、原点を中心とする半径 r の円を D とする。ただし、 $r > 0$ とする。放物線 C と円 D は共有点をもたないとする。以下の問いに答えよ。

- (1) r の値の範囲を求めよ。
 (2) $0 < \theta < \pi$ のとき、円 D 上の点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ における D の接線を l とする。接線 l と放物線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。ただし、 S は r と $\sin \theta$ を用いて表すこと。