数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)　$x^{3m}-1=(x^3)^m-1$

$$=(x^3-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$$

m は正の整数であるから，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる　…[証明終]

(2)　$x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とすると，$\omega^3=1$

$$\omega^3-1=0$$

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$\omega\neq 1$ であるから

$$\omega^2+\omega+1=0$$

x^n-1 を x^2+x+1 で割ったときの商を $P(x)$，余りを $ax+b$ とすると (ただし，a，b は実数)

$$x^n-1=(x^2+x+1)P(x)+ax+b$$

このとき，$\omega^n-1=a\omega+b$

(ⅰ)　$n=3m$ $(m=1，2，3，\cdots)$ のとき，$\omega^3=1$ より

$$\omega^n-1=(\omega^3)^m-1=0$$

$$a\omega+b=0$$

a，b は実数，ω は虚数であるから，$a=b=0$

よって，余りは 0

(ⅱ)　$n=3m+1$ $(m=0，1，2，\cdots)$ のとき

$$\omega^{3m+1}-1=a\omega+b$$

$\omega^3=1$ だから，$\omega^{3m+1}-1=\omega-1$ より

$$\omega-1=a\omega+b$$

a，b は実数，ω は虚数より $a=1$，$b=-1$

よって，余りは $x-1$

(ⅲ)　$n=3m+2$ $(m=0，1，2，\cdots)$ のとき

$$\omega^{3m+2}-1=a\omega+b$$

$\omega^{3m+2}-1=\omega^2-1=(-\omega-1)-1=-\omega-2$ より

$$-\omega-2=a\omega+b$$

a，b は実数，ω は虚数より $a=-1$，$b=-2$

よって，余りは $-x-2$

以上から，x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りは

$$\begin{cases} n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき} & 0 \\ n \text{ が } 3 \text{ で割って余りが } 1 \text{ のとき} & x-1 \\ n \text{ が } 3 \text{ で割って余りが } 2 \text{ のとき} & -x-2 \end{cases}$$ …[答]

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $sx+t$ とすると (ただし，s，t は実数)

$$x^{2024}-1=(x^2-x+1)Q(x)+sx+t$$

$x=-\omega$ として

$$(-\omega)^{2024}-1=(\omega^2+\omega+1)Q(-\omega)-s\omega+t$$

$$\omega^{2024}-1=-s\omega+t$$

$2024=3\times674+2$ から $\omega^{2024}=\omega^2$ より

$$(-\omega)^{2024}-1=\omega^2-1=(-\omega-1)-1=-\omega-2$$

$$-\omega-2=-s\omega+t$$

s，t は実数，ω は虚数より，$s=1$，$t=-2$

したがって，求める余りは　$x-2$ …[答]

高松高等予備校

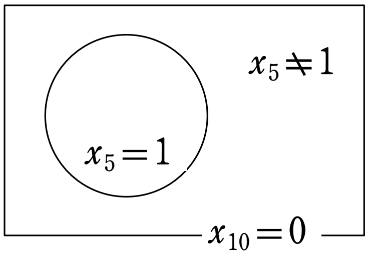
$\boxed{2}$

一般に事象Aが起こる確率をP(A)と表すことにする。

(1)　$x_{10}=0$ となるのは表5回裏5回出たときだから

$$P(x_{10}=0)={}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256}$$ …[答]

(2)　求める確率を



$P(x_5\neq 1$ かつ $x_{10}=0)=P(x_{10}=0)-P(x_5=1$ かつ $x_{10}=0)$

と考えて $x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となるのは

はじめの5回は表3回裏2回出て，

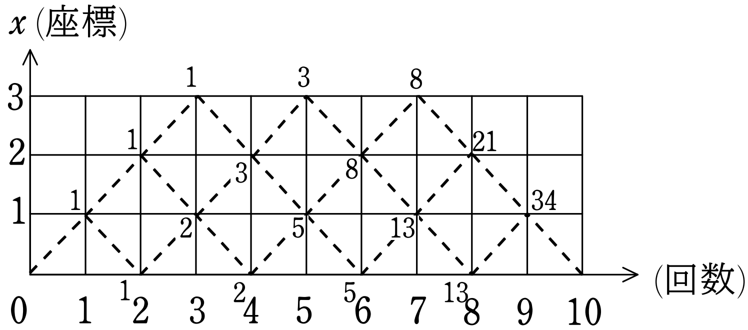
あとの5回は表2回裏3回出るときだから

$$P(x_5=1 \text{ かつ } x_{10}=0)={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{25}{256}$$

よって

$$P(x_5\neq 1 \text{ かつ } x_{10}=0)=\frac{63}{256}-\frac{25}{256}=\frac{19}{128}$$ …[答]

(3)　点Pの移動を次の図のように考える。



$0\leqq x_n\leqq 3\ (n=1,2,\cdots,9)$ かつ $x_{10}=0$ となるのは

点線を通過するときで，この経路は34通りある。

よって，求める確率は

$$34\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{17}{512}$$ …[答]

$\boxed{3}$

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，　$\angle\mathrm{COA}=\alpha$，$\angle\mathrm{COB}=\beta$，$\angle\mathrm{AOB}=\gamma$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma=\cos\gamma$

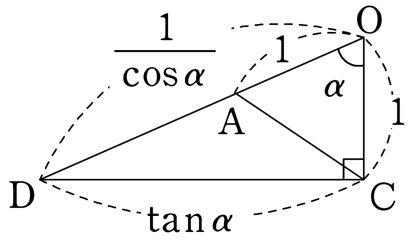
$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\beta=\cos\beta$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos\alpha=\cos\alpha$

△COD において∠OCD$=90°$，∠COD$=\alpha$より

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\alpha$

$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\dfrac{1}{\cos\alpha}$



よって

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}\vec{a}$

ゆえに

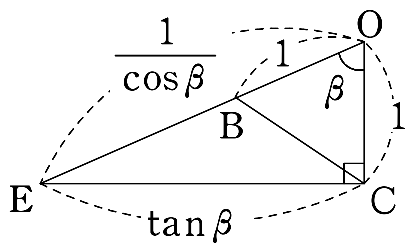
$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\quad=\dfrac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}$

△COE において∠OCE$=90°$，∠COE$=\beta$より

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|\cos\beta$

$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\dfrac{1}{\cos\beta}$



よって

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{1}{\cos\beta}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b}$

ゆえに

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\quad=\dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}$　…[答]

(2)　(1) の図より

$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\tan\alpha=\tan\alpha$

$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\tan\beta=\tan\beta$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$\quad=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \qquad (\because\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ より } \overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0)$$
$$=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\frac{1}{\cos\beta}\vec{b}$$
$$=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{\cos\beta}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1$$

よって

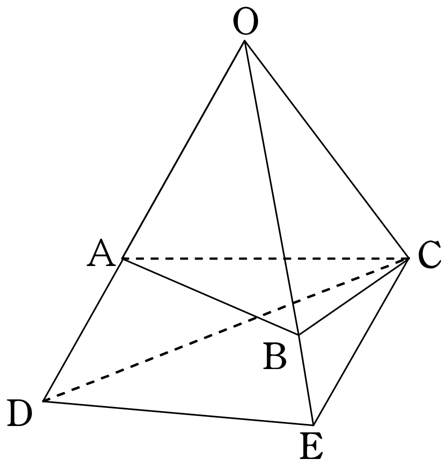
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|}$$
$$=\frac{\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1}{\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$
$$=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$ …[答]

(3) $$\cos\theta=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$
$$=\frac{\cos\gamma-\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \qquad (\because\ \cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta)$$
$$=0$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=90^\circ$　つまり　$\angle\mathrm{DCE}=90^\circ$

よって，△CDE の面積を S_1 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|$$
$$=\frac{1}{2}\tan\alpha\tan\beta$$
$$=\frac{1}{2}\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{2}\tan\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}$$
$$=\frac{1}{2}$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp$ 平面 CDE

よって，四面体 OCDE の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_1\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6} \qquad \cdots①$$

また，△DOE の面積を S_2 とすると

$$S_2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|\sin\gamma$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\sin\gamma$$

$$=\frac{\sin\gamma}{2\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin\gamma}{2\cos\gamma}$$

$$=\frac{\tan\gamma}{2}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp$ 平面 DOE より

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_2\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CP}}| \qquad \cdots②$$

①，②より

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot S_2\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{1}{2S_2}=\frac{1}{2\cdot\frac{\tan\gamma}{2}}=\frac{1}{\tan\gamma} \qquad \cdots[証明終]$$

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　点 P$(a,\ 1-a)$ とおく $(0 \leqq a \leqq 1)$

ℓ は点 P を通り傾き 1 の直線より

$$y-(1-a)=1\cdot(x-a)$$

よって　ℓ：$y=x+1-2a$　…①

ここで，t は点 $(0,\ 1)$ と点 P$(a,\ 1-a)$ の距離であるから

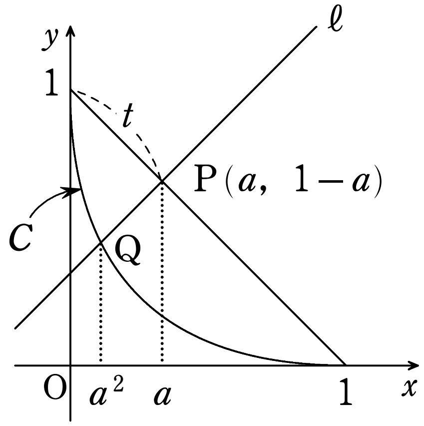
$$t^2=(a-0)^2+(1-a-1)^2=2a^2$$

よって　$t=\sqrt{2}\,a$

① より，t を用いて表すと

$$\ell：y=x+1-\sqrt{2}\,t$$

…[答]



(2)　点 Q は ℓ と C の交点であるから

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$

両辺を 2 乗して　$y=1-2\sqrt{x}+x$　…②

①，②より　$x+1-2a=1-2\sqrt{x}+x$

$$2\sqrt{x}=2a$$

$$\therefore\quad x=a^2$$

点 Q の x 座標は a^2 で，ℓ の傾きは 1 であるから

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}(a-a^2)$$

$a=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ より　$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}-\dfrac{t^2}{2}\right)=t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2$　…[答]

(3)　求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2dt$$

(2) より　$\mathrm{PQ}^2=\left(t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2\right)^2=t^2-\sqrt{2}\,t^3+\dfrac{1}{2}t^4$

よって

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(t^2-\sqrt{2}\,t^3+\frac{1}{2}t^4\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{\sqrt{2}}{4}t^4+\frac{1}{10}t^5\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{15}\pi$$

…[答]

高松高等予備校